سلسلة اعمال موجهة رقم 2

تمرين 1. 1. عين بطريقتين مختلفتين الاشكال الخطية المعرفة من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$. عمم النتيجة دون برهان من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

2. عين التطبيقات الخطية المعرفة من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^m$ حيث $n, m \in \mathbb{N}^*$.

3. اعطى ثلاثة امثلة حول الاشكال الخطية والتطبيقات الخطية للسؤالين السابقين.

4. هل الاشكال والتطبيقات الخطية الموجودة في السؤال 1 و2 مستمرة ؟

تمرين 2. ليكن $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ فضاءان نظيميان برهن انه:

$$A \in \mathcal{L}(E,F) \iff \forall (x_n)_{\mathbb{N}} \subset E;\ x_n \xrightarrow{E} 0 \implies Ax_n \xrightarrow{F} 0$$

تمرين 3. ليكن $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ نعرف التطبيق L من E في $\mathbb{R}$ كمايلي: $\forall f \in E\ :\ \mathrm{L}(f) = f(0)$

1. نزود E بنظيم التقارب المنتظم تحقق ان $\mathrm{L} \in E'$ ثم احسب $\|\mathrm{L}\|_{E'}$.

2. نزود E بالنظيم $\|.\|_1$ بين ان L ليس مستمر . يمكن استعمال متتالية الدوال $f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & ; x \in [-1/n, 1/n] \\ 0 & \text{البقية} \end{cases}$

تمرين 4. ليكن $(E, \|.\|_E)$ فضاء نظيمي نريد ان نبرهن انه لايوجد تطبيقان خطيان مستمران A, B بحيث: $AB - BA = I$.
نفرض انه يوجد $A, B \in \mathcal{L}(E)$ بحيث: $AB - BA = I$

1. برهن بالتراجع انه: $\forall n \in \mathbb{N}^* : AB^n - B^nA = nB^{n-1}$

2. باستعمال العلاقة التراجعية الاخيرة برهن ان هذا يتناقض مع كون $A, B \in \mathcal{L}(E)$

تمرين 5. ليكن $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ مزود بالنظيم $\|.\|_\infty$ و $(\mathrm{L}_n)_n$ متتالية دوال معرفة من E في $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$\mathrm{L}_n(f) = n\left[f(1/n) - f(0)\right],\ n \in \mathbb{N}^*$$

.

1. بين ان : $\mathrm{L}_n \in E',\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. بين ان: $\forall f \in E : \lim_{n\to\infty} \mathrm{L}_n(f) = L(f) = f'(0)$.

3. هل L مستمر؟ هل يمكن تطبيق نظرية بناخ شتاينهوس؟

تمرين 6. ليكن $(E, \|\|_\infty) = (\mathcal{C}^1_{([0,1],\mathbb{R})}, \|.\|_\infty)$ و $(T_n)_n$ متتالية تطبيقات معرفة من E في $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$T_n(f) = n\int_0^{1/n} f(x)dx,\ n \in \mathbb{N}^*$$

.

1. بين ان: $T_n \in E',\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ثم احسب $\|T_n\|_{E'}$.

2. بين ان : $\forall f \in E : \lim_{n\to\infty} T_n(f) = T(f) = f(0)$. استنتج ان $T \in \mathcal{L}(E)$.

3. نزود E بالنظيم $\|.\|_1$

(أ) بين ان: $\|T_n\| \leq n \quad : \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(ب) باستعمال متتالية الدوال f_n المعرفة بالعبارة:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{اذا كان } 0\le x\le 1/2n\\ -2nx+2 & \text{اذا كان } 1/2n\le x\le 1/n\\ 0 & \text{اذا كان } 1/n\le x\le 1\end{cases}$$

بين ان

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \|T_n\|=n.$$

استنتج ان $(T_n)_n$ ليست متساوية الاستمرار

(ج) تأكد من ان : $\forall f\in E:\ \lim_{n\to\infty}T_n(f)=T(f)=f(0).$ برهن ان T ليس مستمرا ، يمكن استعمال

$$f(x)=\begin{cases}n & \text{اذا كان } x=0\\ -n^2x+n & \text{اذا كان } 0\le x\le 1/n\\ 0 & \text{اذا كان } 1/n\le x\le 1\end{cases}$$

ماهي النتيجة التي انتفضت بهدا؟ ماالذي ادى الى دلك حسب رايك؟

تمرين 7. ليكن $E_1=(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty),\quad E_2=(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_1)$ فضائين نظيميين و ليكن I التطبيق المطابق من E_1 في E_2.

1. بين ان I تطبيق تقابلي و مستمر وتطبيقه العكسي غير مستمر.
2. استنتج ان E_2 ليس تام.

تمرين 8. ليكن $E=(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty),\quad F=(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ فضائين نظيميين و ليكن A التطبيق المعرف من E في F بالعبا

$$\forall f\in E\ :\ Af=f'$$

1. بين ان بيانه مغلق $G(T)\{(f,Af);\ f\in E\}$
2. بين ان التطبيق ليس مستمر ، ثم فسر النتيجة.

Université du 20 août 1955 Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques — Dr N. BELLAL
3ème année LICENCE — n.bellal@univ-skikda.dz
Module : Introduction à la théorie des opérateurs linéaires. — 2016/2017

Série de TD N° 2
Opérateurs linéaires bornés

Exercice 1

1) Déterminer par deux méthodes différentes les formes linéaires définies de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Généraliser le résultat son démonstration de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Déterminer les applications linéaires définies de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ tel que $n,\ m \in \mathbb{N}^*$.

3) Donner trois exemples de formes linéaires et applications linéaires pour les deux questions précédentes.

4) Est-ce que les formes linéaires et applications linéaires des questions 1) et 2) sont continues ?

Exercice 2

Soient $(F,\ \|.\|_F)$, $(E,\ \|.\|_E)$ deux espaces vectoriels normés montrer que:

$A \in L(E,\ F) \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_{\mathbb{N}} \subset E;\ x_n \overset{E}{\to} 0 \Rightarrow Ax_n \overset{F}{\to} 0\right)$, (où $L(E,\ F)$ espace des formes

Exercice 3

Soit $E = C\left([-1,\ 1],\ \mathbb{R}\right)$ on définie l'application de E dans $\mathbb{R}$:

$$\forall f \in E : L(f) = f(0)$$

1) On muni E de la norme de la convergence uniforme vérifier que $L \in E'$ puis calculer $\|L\|_{E'}$.

2) On muni E de la norme $\|.\|_1$ montrer que L n'est pas continue. On peut utiliser la suite de fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x|;\ x \in \left[\frac{-1}{n},\ \frac{1}{n}\right] \\ 0 \qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $\left(E,\ \|.\|_E\right)$ un espace vectoriel normé on veut montrer que il n'existes pas deux applications linéaires continues $A,\ B$ tel que :$AB - BA = I$.

Aide

On suppose qu'il existe $A,\ B \in L(E)$ tel que: $AB - BA = I$

1) Démontrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^*\ :\ AB^n - B^nA = n\,B^{n-1}$.

2) En utilisant la dernière relation de récurrence démontrer que ceci contredit le fait que : $A,\ B \in L(E)$

Exercice 5

Soient $E = C^1\left(\left[0,\ 1\right],\ \mathbb{R}\right)$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $(L_n)_n$ une suite de fonction définies de E dans $\mathbb{R}$ par

$$f \mapsto L_n(f) = n[f(\tfrac{1}{n}) - f(0)],\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*(L_n)$ est une forme linéaire continue sur E.

b) Montrer que:

$$\forall f \in E\ \lim_{n \to \infty}\ L_n(f) = L(f) = f'(0).$$

c) L est-elle continue? Peut-on appliquer le théorème de Banach-Steinhaus?

Exercice 6

Soient $\left(E,\ \|.\|_\infty\right) = \left(C\left(\left[0,\ 1\right],\ \mathbb{R}\right),\ \|.\|_\infty\right)$ et $(T_n)_n$ une suite d'applications définies par $T_n\ :\ E \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto T_n(f) = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*,\ T_n$ appartient à E'.

2) Calculer $\|T_n\|,\ n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que:

$$\forall f \in E \diagup\ \lim_{n \to \infty}\ T_n(f) = T(f) = f(0).$$

4) En déduire que T est continue puis calculer sa norme.

On suppose maintenant que E est muni de la norme fondamentale $\|.\|_1$.

5) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*,\ \|T_n\| \leq n$.

6) En s'aidant de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ -2nx + 2 & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \|T_n\| = n.$$

7) En déduire que $(T_n)_n$ n'est pas équicontinue.

8) Montrer que T n'est pas continue, c-à-d:

$$\forall c > 0 \; \exists \, f_0 \in E / |T(f_0)| > c\|f_0\|_1.$$

(on pourra utiliser la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{pour } x = 0 \\ -n^2x + n & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{pour } \frac{1}{n} \leq x \leq 1.) \end{cases}$$

9) Quel résultat cela paraît contredire? Pourquoi?

Exercice 7

$E = C\left(\left[0,\ 1\right]\right)$ est l'espace des fonctions continues sur $\left[0,\ 1\right]$, à valeurs complexes.

On considère les deux espaces normés $E_1 = \left(E,\ \|.\|_\infty\right)$ et $E_2 = \left(E,\ \|.\|_1\right)$, où $\|f\|_\infty = \sup\ \left(|f(t)|; t \in \left[0,\ 1\right]\right)$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

On désigne par I l'application identité de E_1 dans E_2.

1) Montrer que I est bijective, continue. Quelle est sa norme?

2) Montrer que I^{-1} n'est pas continue (on pourra utiliser la suite $f_n(t) = t^n$).

3) En déduire que E_2 n'est pas complet.

Exercice 8

Soit $E = C^1\left(\left[0,\ 1\right]\right)$ l'espace des fonctions définies sur $\left[0,\ 1\right]$, à valeurs complexes, continûment dérivables, et $F = C\left(\left[0,\ 1\right]\right)$ l'espace des fonctions continues définies sur $\left[0,\ 1\right]$, à valeurs complexes, tous deux munis de la norme $\|.\|_\infty$.

Soit $T : E \to F$ défini par $\forall f \in E,\ Tf = f'$.

On note $G(T) = \left\{\left(f,\ Tf\right);\ f \in E\right\}$ le graphe de T.

1) Montrer que $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

2) Montrer que T n'est pas continue (on pourra utiliser la suite $f_n \in E,\ f_n(x) = x^n$).

3) Expliquer le résultat.